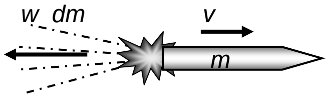
Einführung in die Physik I

Dynamik des Massenpunkts (3)

O. von der Lühe und U. Landgraf

Beispiele zum Impuls- und Energiesatz - Rakete

- Eine Rakete mit der Masse *m* fliegt mit der Geschwindigkeit *v* im leeren, kräftefreien Raum
- Sie stößt in der Zeit *dt* die Masse *dm* Treibstoff mit einer konstanten Geschwindigkeit *w* aus
- Die Masse *m(t)* vermindert sich um *dm*, daher ist *dm* negativ
- Die Impulserhaltung fordert, dass die Geschwindigkeit *v(t)* der Rakete in der Zeit *dt* um einen Betrag *dv* zunimmt



$$\boxed{-w\frac{dm}{dt} = m\frac{dv}{dt} = m \cdot a}$$

$$\boxed{\frac{1}{m(t)}\frac{d\,m(t)}{dt} = -\frac{1}{w}\frac{d\,v(t)}{dt}}$$

Beispiele zum Impuls- und Energiesatz - Rakete

- Mithilfe der Differentialgleichung aus dem Impulssatz kann man einen einfachen Zusammenhang zwischen Masse und Geschwindigkeit herstellen

$$\boxed{\frac{1}{m(t)}\frac{d\,m(t)}{dt} = -\frac{1}{w}\frac{d\,v(t)}{dt}}$$

$$\boxed{\frac{d\,m}{m} = -\frac{1}{w}dv}$$

- Zeitabhängigkeit „herauskürzen“ (Trennung der Variablen)
- Integration beider Seiten über die jeweilige Variable
- Integrationskonstante m_0
- Die Masse der Rakete nimmt mit zunehmender Geschwindigkeit v exponentiell ab

$$\int \frac{1}{m}dm = -\frac{1}{w}\int dv$$

$$\ln\frac{m}{m_0} = -\frac{v}{w}$$

$$m = m_0 \cdot e^{-\frac{v}{w}}$$

Beispiele zum Impuls- und Energiesatz - Rakete

- Bei Brennschluss – Masse m_1 – hat die Rakete eine Geschwindigkeit v_1 erreicht
- Ein realistisches Massenverhältnis zwischen leerer und voll betankter Rakete ist $m_1/m_0 = 1/6$
- Damit beträgt v_1 etwa das 1.8-fache von w
- Die Geschwindigkeit der Brenngase beträgt etwa 2 – 3 km/s, die Endgeschwindigkeit der Rakete etwa 3 – 5 km/s

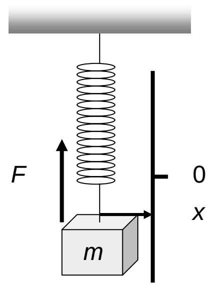
$$m_1 = m_0 \cdot e^{-\frac{v_1}{w}}$$

$$\frac{m_1}{m_0} = e^{-\frac{v_1}{w}}$$

Schwingungsenergie

- Die Kraft einer Feder ist proportional zu ihrer Auslenkung aus der Ruhestellung (**Hooke‘sches Gesetz**)

$$F = -D \cdot x$$



- Die Größe *D* heißt Federkonstante, Einheit [N m^{-1}] = [kg s^{-2}]
- Auslenkung der Feder durch eine Masse *m*
- Die potentielle Energie ist

$$E_{\mathrm{pot}} = -\int_0^x F\,dx = \frac{1}{2} D x^2$$

Schwingungsenergie

- Gesamtenergie

$$E = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} D x^2 = \text{konstant}$$

- Ansatz für die Funktion *x(t)*

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t)$$
$$\dot{x}(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

- Aus der Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} D A^2 \sin^2(\omega t)$$

- Kreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{D}{m}$$

$$E = \frac{1}{2} D A^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} D A^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} D A^2 \left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right) = \frac{1}{2} D A^2$$

- Federpendel führt **harmonische Bewegung** aus

Stoßgesetze

- **Stoß**: sehr kurzzeitige Wechselwirkung zwischen zwei Körpern
- Geschwindigkeiten vor dem Stoß v_1, v_2
- Geschwindigkeiten nach dem Stoß v'_1, v'_2
- Erhaltung des Gesamtimpulses

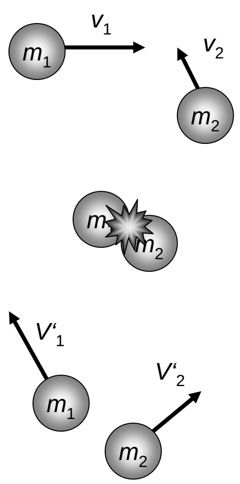
$$\boxed{m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'}$$

- Erhaltung des Gesamtenergie – **elastischer Stoß**

$$\boxed{\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2}$$

- Abnahme des Gesamtenergie (z. B. Deformation)– **anelastischer Stoß**

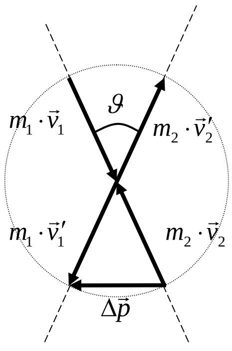
$$\boxed{\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 > \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2}$$



Stoßgesetze – Schwerpunktsystem

- **Schwerpunktsystem:** Ursprung des Koordinatensystems ist der gemeinsame Schwerpunkt der beiden Massen
- Gesamtimpuls verschwindet – Einzelimpulse haben vor und nach dem Stoß den gleichen Betrag
- Richtungsänderung der Bewegung durch **Impulsübertrag**

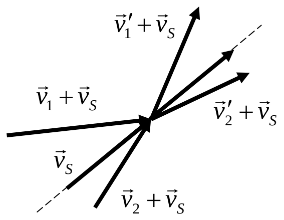
$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\vec{p} &= m_1\left(\vec{v}_1' - \vec{v}_1\right) \\ \left|\Delta\vec{p}\right| &= 2 m_1 \cdot v_1 \cdot \sin\frac{\vartheta}{2} \end{aligned}}$$



- **Energieübertrag** ist Null

Stoßgesetze

- **Laborsystem**: Ursprung des Koordinatensystems ist durch die experimentellen Bedingungen gegeben, Schwerpunkt bewegt sich geradlinig gleichförmig mit Geschwindigkeit $\vec{v}_S$



- Der **Impulsübertrag** ist derselbe wie im Schwerpunktsystem, da der Gesamtimpuls sich nicht ändert

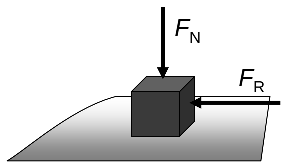
- Der **Energieübertrag** ist

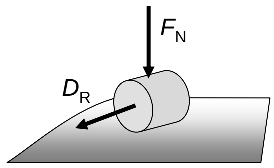
$$\boxed{\begin{aligned}\Delta E &= \tfrac{1}{2} m_1 \left[\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_S\right)^2 - \left(\vec{v}_1' + \vec{v}_S\right)^2 \right] \\ &= \Delta \vec{p} \cdot \vec{v}_S\end{aligned}}$$

Reibungskräfte

- **Reibung** verwandelt kinetische Energie in Wärmeenergie
- Bewegte Körper verlieren unter dem Einfluss der Reibung an Geschwindigkeit (**Bremswirkung**)
- Man unterscheidet mehrere – meist empirische – Gesetze für **Reibungskräfte**

- **Trockene Reibung** (Coulomb-Reibung):
  - tritt auf, wenn sich ein Körper auf einer trockenen Unterlage ohne Schmierung bewegt
  - Ist unabhängig von der Geschwindigkeit
  - **Haftreibung** F'_R und **Gleitreibung** F_R
  - Normalkraft F_N
  - Reibungskoeffizient μ, μ'
  - **Rollreibung** zwischen rollendem Körper und Unterlage – Reibungsdrehmoment D_R
  - Rollreibungskoeffizient μ'', Einheit [m]





$$\boxed{\begin{aligned}F_R &= \mu \cdot F_N \\ F_R' &= \mu' \cdot F_N\end{aligned}}$$

$$\boxed{D_R = \mu'' \cdot F_N}$$

Reibungskräfte

Stoffe	**Bedingungen**	**μ‘ (Haft)**	**μ (Gleit)**	**μ“ (Roll)**
Stahl / Stahl (20°)	trocken Maschinenöl	0.5 – 0.8 0.08	0.4 0.06	0.05 0.03-0.1
Glas / Glas	trocken Paraffinöl	0.9 – 1.0 0.5 – 0.6	0.4	
Eis / Eis (trocken)	0 °C -80 °C	0.05 – 0.15	0.02 0.09	
Gummi / Asphalt	trocken nass Eis	1.2 0.6	1.05 0.4 ca 0.1	

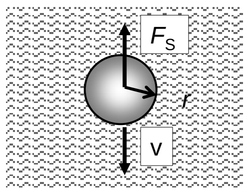
Quellen: Demtröder, Physik; Pfeifer et al., Kompaktkurs Physik

Reibungskräfte

- **Viskose Reibung** (Stokes-Reibung):
  - Bremskraft, die kleinere, langsame Körper in einer Flüssigkeit erfahren
  - Proportional zur Geschwindigkeit *v*

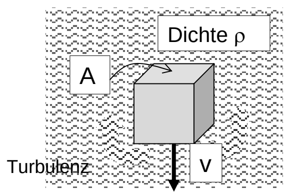
$$\boxed{F_R = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v}$$

  - **Zähigkeit** (Viskosität) η



- **Newton-Reibung**:
  - Bremskraft, die größere, schnelle Körper in einer Flüssigkeit erfahren
  - Proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit

$$\boxed{F_R = \tfrac{1}{2} \cdot c_W \cdot \rho \cdot A \cdot v^2}$$



- **Widerstandskoeffizient** c_W

Reibungskräfte

Abb. 1.44. *Ballistische Kurven*, berechnet nach dem Runge-Kutta-Verfahren. Annahme: Luftwiderstand $\sim v^2$. Ähnlich wirkt sich der Luftwiderstand auf einen Wasserstrahl aus, unterstützt durch das Zersprühen in Tropfen. v_0: Anfangsgeschwindigkeit, α: Abschusswinkel. *Oben*: Für jedes α läuft v_0 von 1 bis 12. *Unten*: Für jedes v_0 läuft α von 15° bis 90° in Schritten von 15°. Einheit des Weges ist $m/k = 2m/(c_w \varrho A)$, Einheit der Geschwindigkeit ist $\sqrt{mg/k}$. So lassen sich die Kurven für jedes Geschoss verwenden. Beispiel: Infanteriegeschoss mit $A = 0{,}5\,\mathrm{cm}^2$, $c_w = 0{,}2$, $m = 20\,\mathrm{g}$; x-Einheit 3 km, v-Einheit 170 m/s